Professeur Messaoud Hannachi

Suites numériques

Exercices corrigés

Editions Al-Djazair

Professeur Messaoud Hannachi
Professeur d'Université

Suites numériques

Exercices Corrigés

Editions Al-Djazair

Suites numériques Enoncés des exercices

Exercice 1 : Démontrer que la suite numérique $(u_n)_{n\in IN}$ est bornée dans les trois cas suivants

$$u_n = \frac{n+1}{n^2} \ , \ u_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{3n+1}{2n+3}$$

Exercice 2 : Démontrer par récurrence :

$$1+2+3+................+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+.........+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 3 : Etudier la nature des deux suites :

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \quad n \in IN^*$$

$$v_n = \frac{1^2+2^2+3^2+.......+n^2}{n^3}, \quad n \in IN^*$$

Exercice 4 : Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \dfrac{2u_{n-1}}{1+u_{n-1}}, \ n \in IN^* \end{cases}$$

- Montrer que la suite est minorée par 1 i.e. : $u_n \succ 1, \ \forall n \in IN$.
- Montrer que la suite donnée est décroissante.
- Calculer : $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 5 : Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = a, \ \ u_2 = b \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}+u_{n-2}}{2}, \ n \in IN^* \end{cases}$$

Posons : $w_n = u_n - u_{n-1}, \ n \ge 2$

- Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique dont on calculera la raison.
- Calculer la somme : $S_n = w_2 + w_3 + ... + w_n$
- Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$, en déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 6 : Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ 3u_{n+1} = u_n + 9,\ n \in IN^* \end{cases}$$

- Calculer $u_2,\ u_3\ et\ u_4$.
- Soit la suite $(v_n)_{n\in IN}$ définie par : $v_n = u_n - \frac{9}{2},\ \forall n \in IN$. Montrer que cette suite est géométrique.
- Donner les expressions de $v_n\ et\ u_n$ en fonction de n seulement. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est convergente et calculer sa limite.
- Soit a un nombre réel et la suite $(w_n)_{n\in IN}$ définie par : $w_n = u_n - a,\ \forall n \in IN$. Montrer que $\frac{9}{2}$ est la seule valeur de a pour laquelle $(w_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique..

Exercice 7 Soient $(u_n)_{n\in IN}$ et $(v_n)_{n\in IN}$ deux suites numériques définies par

$$\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3},\ \forall n \in IN^* \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} v_1 = 12 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4},\ \forall n \in IN^* \end{cases}$$

- 1) Montrer que : $v_n - u_n = \frac{1}{12^{n-1}}, \forall n \in IN^*$. En déduire $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n)$.
- 2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in IN}$ décroissante. Déduire que les deux suites sont adjacentes.
- 3) On pose $w_n = 3u_n + 8v_n$. Calculer w_1. Montrer que la suite ainsi définie est une suite constante, calculer alors les limites des suites $(u_n)_{n\in IN}$ et $(v_n)_{n\in IN}$.

Exercice 8 Calculer les limites des suites suivantes:

$$u_n = \frac{1+3+.5..........+(2n-1)}{1+2+3+..................n} \qquad (\lim_{n\to+\infty} u_n = 2)$$

$$v_n = \frac{1^2+2^2+3^2+..............+n^2}{n^3} \qquad (\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{3})$$

Exercice 9 On considère une suite numérique à termes positifs convergente avec

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a .$$

Montrer que :

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n} = a$$

Exercice 10 Analyse combinatoire. Démontrer les formules suivantes

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$$
$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + .C_{2n}^4 .... + C_{2n}^{2n} = 2^{n-1}$$

Exercice 11 On considère la suite : $u_n = \cos(n!\, \pi\, x)$

Montrer qu'elle a une limite si x est rationnel.

Exercice 12 Soit p et q deux entiers naturels tels que :

$\frac{p}{q} < \sqrt{2}$, montrer que : $\frac{p+2q}{p+q} > \sqrt{2}$

Solutions des exercices

Exercice 1 :

- $u_n = \frac{n+1}{n^2} \Rightarrow 0 \prec u_n \leq 1$.
- $u_n = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \leq u_n \leq 1$.
- $u_n = \frac{3n+1}{2n+3} \Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$. Il est évident que $u_n \geq 0$, $\forall n \in IN$.

Exercice 2 :

On va démontrer par récurrence la deuxième relation

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

i) la relation est vraie pour $n = 1$, en effet on a bien : $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

ii) **<u>Hypothèse de récurrence :</u>** On suppose que la relation est vraie pour n

iii) On démontre que la relation est vraie pour n+1 : on a en utilisant ce qui précède :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right]$$

On obtient

$$= (n+1)\left[\frac{2n^2 + 7n + 6}{6}\right] = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Ce qui termine la démonstration.

Exercice 3 :

La suite $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, $n \in IN^*$ n'a pas de limite car :

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 \ si \ n \ est \ pair \\ -1 \ si \ n \ est \ impair \end{cases}.$$

La deuxième suite est convergente car :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2}{n^3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2}{3}.$$

Exercice 4 :

- Montrons par récurrence que la suite est minorée par 1 i.e. : $u_n \succ 1, \ \forall n \in IN$.

- L'inégalité est vraie pour $u_0 = 2 > 1$.
- **<u>Hypothèse de récurrence :</u>** On suppose que la relation est vraie pour n : $u_n > 1$
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $(n+1)$ on a :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n}{1+u_n} - 1 = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} > 0$$

- Montrer que la suite donnée est décroissante. :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n}{u_n + 1} = \frac{-u_n(u_n - 1)}{u_n + 1} \prec 0$$

- Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: La suite $(u_n)_{n\in IN}$ est une suite décroissante minorée elle est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, ce qui nous donne :

$$l = \frac{2l}{1+l} \Rightarrow l^2 - l = 0 \Rightarrow l(l-1) = 0 \Rightarrow l = 0 \ et \ l = 1$$

Seule la limite $l = 1$ est acceptée car $u_n \geq 1$.

Exercice 5 : On a

$$w_n = u_n - u_{n-1}, \ n \geq 2$$

$$\begin{cases} u_1 = a, \ \ u_2 = b \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n-2}}{2}, \ n \in IN^* \end{cases}$$

$$w_{n+1} = u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2} - u_n = \frac{u_{n-1} - u_n}{2} = -\frac{w_n}{2} \Rightarrow \frac{w_{n+1}}{w_n} = -\frac{1}{2}$$

Donc la suite $(w_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique et la raison est égale à : $-\frac{1}{2}$.

$$S_n = w_2 + w_3 + ... + w_n = w_2 + \left(-\frac{1}{2}\right)w_2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 w_2 + ... + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} w_2$$

$$= w_2 \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$S_n = \frac{2}{3}(u_2 - u_1)\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \frac{2}{3}(b-a)\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}(b-a)$$

Mais :

$$S_n = w_2 + w_3 + ... + w_n = (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + ... + (u_n - u_{n-1}) = u_n - a$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n + a = \frac{3b-a}{2}.$$

Exercice 6 :

$$u_2 = \frac{10}{3}, \ u_3 = \frac{37}{9} \ et \ u_4 = \frac{118}{27}$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{9}{2} = \frac{u_n + 9}{3} - \frac{9}{2} = \frac{2\left(u_n - \frac{9}{2}\right)}{6} \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{3}$$

- Donc la suite $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
- $v_n = \frac{1}{3} v_{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 v_{n-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} v_1 = -\frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$

La suite $(v_n)_{n\in IN}$ est ainsi convergente et a pour limite zéro.

La suite $(u_n)_{n\in IN}$ est donc convergente et $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{9}{2}$

Pour que la suite $(w_n)_{n\in IN}$ soit une suite géométrique, on doit avoir nécessairement

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1} - a}{u_n - a} = r$$

où r est une constante, utilisant les valeurs calculées de u_1, u_2, u_3, on a :

$$\frac{\frac{10}{3} - a}{1 - a} = \frac{\frac{37}{9} - a}{\frac{10}{3} - a} \Leftrightarrow \frac{100}{9} - \frac{20a}{3} = \frac{37}{9} - \frac{37}{9}a - a \Rightarrow \frac{14}{9}a = 7.$$

Finalement $a = \frac{9}{2}.$

Exercice 7 :

1) $v_n - u_n = \frac{u_{n-1} + 3v_{n-1}}{4} - \frac{u_{n-1} + 2v_{n-1}}{3} = \frac{1}{12}(v_{n-1} - u_{n-1})$

Par itération on obtient :

$$v_n - u_n = \frac{1}{12^{n-1}}.(v_1 - u_1) = \frac{1}{12^{n-1}}.$$

Ce qui nous donne

$$\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$$

2) La suite $(u_n)_{n\in IN}$ est croissante, en effet on a :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n=\frac{2(v_n-u_n)}{3}\geq 0\Rightarrow u_{n+1}\geq u_n$$

La suite $(v_n)_{n\in IN}$ est décroissante, on a bien :

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n-v_n}{4}\leq 0\Rightarrow v_{n+1}\leq v_n$$

Avec : $v_n\geq u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

Donc les deux suites données sont des suites adjacentes.

3) On a : w_1=129, avec

$$w_n=3u_n+8v_n=3u_{n-1}+8v_{n-1}=w_1=129$$

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=l$, par passage à la limite dans l'expression de w_n, on obtient :

$$11l=129\Rightarrow l=\frac{129}{11}$$

Exercice 8 : (Indication : On a les relations suivantes

$$S_0=1^0+2^0+..........+n^0=n$$

$$S_1=1^1+2^1+..........+n^1=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2=1^2+2^2+..........+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3=1^3+2^3+..........+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$S_4=1^4+2^4+..........+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+n-1)}{30}$$

Méthode de calcul des S_p : Exemple, calcul de S_2 :

$$1^3=1^3$$

$$(1+1)^3=1^3+3.1+3.1^2+1^3$$

$$(1+2)^3=1^3+3.2+3.2^2+2^3$$

$$(1+3)^3=1^3+3.3+3.3^2+3^3$$

……………………………………

....

$$(1+n)^3=1^3+3n+3n^2+n^3$$

$(1+n)^3=n+1+3S_1+3S_2$ (Résultat obtenu par addition)

Connaissant S_1, on en déduit facilement S_2 . En appliquant de proche en proche cette méthode, on arrivera à calculer S_p, pour p aussi grand que l'on veut, en effet on a :

$$3S_2 = (1+n)^3 - n - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

Autre titre du même auteur : Séries numériques - Rappel de cours et exercices corrigés

Copyright Edtions El-Djazair
Dépot légal 2546-2013
13, rue des frères Boulahdour
16000 Alger-Algérie

